

Задаци - пета недеља

задаци са * су посебно важни

- Доказати да у сваком пољу карактеристике нула $(E, +, \cdot, 0, 1)$ важи да за свако $m \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ имамо:
$$(mk \cdot 1) \cdot (lk \cdot 1)^{-1} = (m \cdot 1) \cdot (l \cdot 1)^{-1}.$$
- Нека је $(E, +, \cdot, 0, 1)$ поље карактеристике нула. Нека су $\varphi, h : (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \rightarrow (E, +, \cdot, 0, 1)$ два хомоморфизма. Показати да тада за све $q \in \mathbb{Q}$ важи $\varphi(q) = h(q)$.
- * Доказати да у сваком тотално уређеном пољу $(E, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ * $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$.
- Нека је $(E, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ тотално уређено Архимедско поље. Доказати да је $\mathbb{Q}_E$ густ у E , то јест $(\forall a, b \in E : b > a) (\exists q \in \mathbb{Q})$ такво да $q \cdot 1 \in (a, b)$.
- * Нека је $(A, +, \leq, 0)$ уређена Абелова група и нека подскупови $E, F \subseteq A$ имају супремум. Доказати да је тада $\sup E + \sup F = \sup(E + F)$, при чему је $E + F := \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$
- Нека је $(A, +, \leq, 0)$ комплетна тотално уређена Абелова група и $B \subseteq A$ њена комплетна густа подгрупа. Тада је $B = A$. (помоћ: за $a \in A$, посматрати скуп $S_a := \{b \in B \mid b < a\} \subseteq B$)
- Користећи основну теорему алгебре доказати да се сваки полином може записати као производ полинома степена један. Закључити одатле да сваки полином (са коефицијентима у $\mathbb{C}$) степена n има тачно n комплексних нула.
- Доказати да Болцано - Вајерштрасова теорема повлачи (APX) и (КАН).
- * Нека је $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ низ уметнутих интервала такав да $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \text{diam } I_n < \varepsilon$. Доказати да је тада $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$ за неко $a \in \mathbb{R}$.
- Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је пресликавање $\psi_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ задато са $\psi_n(x) = x^n$ строго растуће.
- Доказати да је $(S^1, \cdot)$ Абелова група.
- Наћи тачке нагомилавања скупова:
$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \wedge |z| \leq 1\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\} \cup \{1 + i\}.$$